독립심화학습 15주차

2017103580 사회학과 김정운

Programming과 변분법은 state에 대한 제한조건이 있어도, 이를 만족하는 최적해를 구하거나 그의 존재성을 증명하기 쉽다. 왜냐하면 제한조건에 라그랑지안 승수를 곱한 다음에 이를 최적화하고자 하는 함수에 더하면, 제한조건이 없을 때와 동일한 방식으로 문제를 풀 수 있기 때문이다. 또한 해당 방법론에 대한 이론적인 증명도 꽤 있다. 하지만 최적제어문제는 state와 control에 대한 제한조건이 있으면, 이를 만족하는 최적해를 구하는 것은 어렵다. 실제로 final time에서 control과 state의 값이 있을 때의 최적제어문제만을 다루는 경우가 많다.

변분법처럼 부등식 제한조건에 라그랑지안 승수와 지시함수를 곱하고, 이를 cost function에 더하는 방식이 있다. 하지만 이는 제한조건을 만족하지 않은 control에 패널티만을 부여하기 때문에, 제한조건을 만족하지 않은 control이 체택될 수 있다. 왜냐하면 제한조건을 위반하여 발생한 비용보다 감소한 cost function이 클 수 있기 때문이다. 그러나 이를 해당 방법론에서 발생하지 않다는 것은 확신할 수 없다.

또한 부등식 제한조건이 state와 time, 또는 control과 time에 대한 함수일 때만, 해당 방법론을 사용할 수 있다. 즉, 부등식이 state와 control을 동시에 포함하면, 부등식 제한조건을 라그랑지안에 반영할 수 없다. 최근에 변분법의 라그랑지안 승수법을 일반화함으로써, 제한조건을 반영한 최적해를 구할 수 있게 되었다. 하지만 differential inclusion(이하 DI)으로 해당 정리를 기술하고 있기 때문에, 제한조건을 만족하는 최적해를 구하는 것이 변분법과 programming보다 어렵다. 난이도가 상승하게 된 이유는 state와 control이 서로 독립이 아니기 때문에 발생한다. programming에서는 state만 사용하고, 변분법에서는 state와 이에 대한 도함수만을 사용한다. 즉, 최적화할 대상이 서로 독립이라는 것이다. 하지만 state는 control에 대한 정보를 포함하고 있으며, 일부 문제에서는 control도 state에 대한 정보를 포함하고 있다.

이러한 종속성으로 인해 optimal control problem(이하 OC)에서 부등식 제한조건을 만족한 최적해를 구하기 어렵다. 실제로 이와 관련된 논문들을 보면, control set이 state에 대한 정보를 포함하지 않음을 전재로 하고 있다. 하지만 이는 현실과 맞지 않을 수 있는데, 현실의 많은 제어항들은 state에 기반하여 설정된 경우가 많기 때문이다. 또한 부등식 제한조건에 사용된 함수들은 서로 독립이어야 한다. 이는 특정한 상황에서 큰 문제가 될 수 있는데, 스타크래프트를 플레이하는 프로그램이 있다고 가정하자. 생산할 수 있는 건물과 유닛(객체)의 개수는 제한적인데, 이들은 서로 영향을 미친다. 왜냐하면 자원이 한정적인 상황에서 어느 것을 생산하면, 다른 것을 선택할 수 없기 때문이다. 이는 확률의 합이 1이기 때문에 자유도가 떨어진다는 것과 맥락을 공유한다.

이러한 상황으로 인해 제한조건을 만족하는 최적해의 존재성을 증명하는 것은 어렵다. 이를 해결할 수 있는 한 가지 방법은 제한조건의 개수를 줄이는 것인데, 이는 연구자의 역량이 요구된다. pmp처럼 제한조건이 반영된 라그랑지안을 control에 대해 미분하면, 제한조건을 만족하는 최적해에 대한 필요조건을 구할 수 있다. 이는 DI를 사용하지 않다는 점에서 직관적이지만, adjoint equation이 존재하지 않다는 문제점을 가지고 있다. 즉, 라그랑지안 승수에 대한 정보가 없다는 것이며, 이를 수치적으로 구하기 위해서는 유전알고리즘 등을 사용해야 한다. 하지만 보다 근본적인 문제는 최적해의 존재성을 증명할 수 없다는 것이다.